Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème 1
(*adapté de Centrale TSI 2023*)

Notations

- On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C}\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs complexes.

  On admet que $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ et $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C}\right)$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie I — Généralités

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p\in\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

   On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
3. Démontrer que l'application
$$\mathcal{L} : \left|\begin{array}{ll} E & \to \mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C}\right) \\ f & \mapsto F \end{array}\right.$$
   est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f

Partie II — Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

4. Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in E$.
   On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$
   (b) Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.
   (d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,
   $$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$
5. Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t + ibt}$.
   (a) Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.
   (b) En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\cos(bt)$ et $h_{\alpha,b} : t \mapsto e^{-at}\sin(bt)$ appartient à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.
6. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.
7. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ appartenant pas à E.

Partie III — Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

8. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$
9. On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f'' \in E$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.
   Démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

Partie IV — Injectivité de la transformation de Laplace

On se propose dans cette partie de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E, c'est-à-dire que
$$\forall (y_1, y_2) \in E^2, \quad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

10. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.
11. Montrer que g est une fonction bornée.
12. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \text{si } u = 0. \end{cases}$

13. Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.
14. En effectuant le changement de variables $t=-\ln u$, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $\left(\sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t)-P_n(t)|\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

16. Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right) = 0$$

17. En déduire que $f=0$.
18. Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

Partie V — Applications aux équations différentielles

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t)+2y'(t)+2y(t) = t+1, \\ y(0)=0; \\ y'(0)=1. \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

19. *Résolution classique*

    (a) Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=t+1$ de la forme $y(t)=at+b$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

    (b) Résoudre alors le problème $(\mathcal{P})$.

20. *Résolution utilisant la transformation de Laplace*

    On suppose que y est une solution du problème $(\mathcal{P})$ vérifiant de plus les hypothèses de la question 8.

    (a) Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $\left(p^2+2p+2\right)\mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{1+p+p^2}{p^2}$.

    (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que

    $$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1+p+p^2}{p^2\left(p^2+2p+2\right)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p+1)^2+1}.$$

    (c) En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$

    (d) Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème $(\mathcal{P})$.

Problème 2
(*adapté de ENS BL 2000*)

Dans ce problème, on s'intéresse aux endomorphismes d'un espace vectoriel laissant invariants tous les vecteurs d'un hyperplan donné.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension d avec $d \geqslant 2$. On considère un hyperplan H de E et φ un endomorphisme de E tel que

$$\forall h \in H, \qquad \varphi(h) = h$$

i.e. laissant invariant tout élément de H.

Préliminaires

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$
2. Montrer qu'il existe un unique réel γ et un unique $h_a \in H$ tels que
$$\varphi(a) = \gamma a + h_a.$$
3. Montrer que le réel γ ne dépend pas du choix de $a \notin H$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

4. Montrer qu'il existe un vecteur u non-nul tel que $\varphi(u) = \gamma u$ *Indication : On pourra calculer* $\varphi\left(a + \dfrac{1}{\gamma - 1} h_a\right)$.

   On note alors $E_\gamma = \mathrm{Vect}(u)$.
5. (a) Montrer que $E_\gamma = \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma \mathrm{Id})$
   (b) Montrer que $E = H \oplus E_\gamma$.
   (c) Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = H \oplus E_\gamma$, donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. Montrer que les seules droites vectorielles D (i.e. les seuls sous-espaces vectoriels de E de dimension 1) telles que $\varphi(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.

   Soit V un sous-espace vectoriel de E.
7. Montrer que si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $\varphi(V) \subset V$.
8. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$.
   (a) Soit $F = E_\gamma + D$. Vérifier que $\varphi(F) \subset F$.
   (b) Montrer que $\varphi(V) \not\subset V$.
9. Déduire des questions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(V) \subset V$.

Partie II

On suppose dans cette partie que $\gamma = 1$ et que φ n'est pas l'application identité de E.

10. (a) Montrer que $\mathrm{Rang}(\varphi - \mathrm{Id}) = 1$.
    (b) Soit c une base de $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un réel $f(x)$ tel que $\varphi(x) = x + f(x)c$.
    (c) Montrer que f est linéaire et que $H = \mathrm{Ker}(f)$
11. Montrer que φ est bijective et déterminer son inverse.
12. En choisissant une base adéquate de E, donner une forme matricielle la plus simple possible de $\mathrm{Mat}(\varphi)$.
13. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un sous-espace V de E pour que $\varphi(V) \subset V$.

Corrigé

Corrigé du problème 1

Partie I — Généralités

1. Soit f et g deux fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   La fonction $f + \lambda g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Pour $p > 0$ on a $|f(t) + \lambda g(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leqslant |f(t)|\mathrm{e}^{-pt} + |\lambda||g(t)|\mathrm{e}^{-pt}$

   Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ convergent, donc par critère de majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t) + \lambda g(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Ainsi $f + \lambda g \in E$.

   On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\boxed{E \text{ est donc un espace vectoriel.}}$

2. Soit $p > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, en tant que produit de fonctions continues.

   Par hypothèse, comme $f \in E$, alors $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ainsi

   $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge.}}$

3. Si $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ est bien une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

   Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a bien $\lambda f + \mu g \in E$.

   De plus, par linéarité de l'intégrale généralisée convergente, pour $p > 0$,

   $$\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t + \mu \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

   C'est-à-dire

   $$\forall t > 0, \qquad \mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mu\mathcal{L}(g)(p).$$

   On a donc l'égalité des fonctions $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$.

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est linéaire.}}$

Partie II — Quelques exemples

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, si $p > 0$, alors par croissances comparées $t^n\mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ D'où

   $$t^n\mathrm{e}^{-pt} = t^n\mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}} = o\left(\mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}}\right)$$

   Or, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (en tant qu'intégrale de référence, car $\dfrac{p}{2} > 0$).

   Par comparaison de fonctions intégrables, la fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-pt}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t^n|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge donc.

   Ainsi, $\boxed{f_n \in E}$.

   (b) On a $\boxed{F_0(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{p}.}$

   (c) On utilise le théorème d'intégration par parties généralisé

   Soit $u : t \mapsto -\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ et $v : t \mapsto t^n$.

Ces fonctions u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et, par croissances comparées, $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a alors $u' : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$ et $v' : t \mapsto nt^{n-1}$

Ainsi (la première intégrale convergeant, le théorème d'intégration par parties nous assure la convergence de la deuxième), pour $p > 0$ on a

$$\begin{aligned} F_n(p) &= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 - \left(-\frac{n}{p}\right)\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{p}F_{n-1}(p) \end{aligned}$$

D'où, pour tout $p > 0$, $\boxed{F_n(p) = \frac{n}{p}F_{n-1}(p)}$.

(d) Soit $p > 0$, on procède par récurrence

Initialisation : Pour $n = 0$, on a déjà obtenu $F_0(p) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{0!}{p^{0+1}}$.

Hérédité :

Soit $n \geqslant 1$, supposons que $F_{n-1}(p) = \dfrac{(n-1)!}{p^n}$.

On a alors par la relation précédente :

$$F_n(p) = \frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

On a donc bien démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p > 0, \qquad F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

5. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-a+ibt}$ est bien continue

Soit $p > 0$, on a $|f_{a,b}(t)|\mathrm{e}^{-pt} = \mathrm{e}^{-(a+p)t}$

Or, comme $a \geqslant 0$ et $p > 0$, $a + p > 0$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_{a,b}(t)|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge, donc $f_{a,b} \in E$.

On a ensuite par primitivation directe, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^A \mathrm{e}^{-(a+p-ib)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+p-ib}\mathrm{e}^{-(a+p-ib)t}\right]_0^A = \frac{1-\mathrm{e}^{-(a+p-ib)A}}{a+p-ib}$$

Or, $|\mathrm{e}^{-(a+p-ib)A}| = |\mathrm{e}^{-(a+p)A}\mathrm{e}^{-ibA}| = \mathrm{e}^{-(a+p)A}$, et comme $a+p > 0$, on a $\mathrm{e}^{-(a+p)A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$:

$$\boxed{F_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+p-ib}}$$

(b) On a pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g_{a,b}(t) = \mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{e}^{ibt}+\mathrm{e}^{-ibt}}{2} = \frac{1}{2}\left(f_{a,b}(t) + f_{a,-b}(t)\right)$$

Ainsi, $g_{a,b} = \dfrac{1}{2}f_{a,b} + \dfrac{1}{2}f_{a,-b}$

On obtient de même $h_{a,b} = \dfrac{1}{2i}f_{a,b} - \dfrac{1}{2i}f_{a,-b}$.

Comme $f_{a,b}$ et $f_{a,-b}$ appartiennent à E et comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ appartiennent à E.

On a alors par linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
G_{a,b}(p) &= \frac{1}{2}F_{a,b}(p) + \frac{1}{2}F_{a,-b}(p) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+p-ib} + \frac{1}{a+p+ib}\right) \\
&= \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2}
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned}
H_{a,b}(p) &= \frac{1}{2i}F_{a,b}(p) - \frac{1}{2i}F_{a,-b}(p) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{a+p-ib} - \frac{1}{a+p+ib}\right) \\
&= \frac{b}{(a+p)^2+b^2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall p > 0, \qquad G_{a,b}(p) = \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2}, \qquad \text{et} \qquad H_{a,b}(p) = \frac{b}{(a+p)^2+b^2}}$$

(c) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée. Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geqslant 0$: $|f(t)| \leqslant M$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $p > 0$, $|f(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leqslant M\mathrm{e}^{-pt}$.

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, $f \in E$.

(d) La fonction exponentielle est bien continue, or pour $p = \frac{1}{2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$ diverge.

$\boxed{\text{La fonction exponentielle est donc une fonction continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ qui n'appartient pas à } E.}$

Partie III — Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

6. On applique le théorème d'intégration par parties pour à f et à $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$.

   Ces deux fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On a $v' : t \mapsto -p\mathrm{e}^{-pt}$ et par hypothèse on a bien $f(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On a notamment, comme $v(0) = 1$, $[f(t)v(t)]_0^{+\infty} = -f(0)$.

   Alors, comme toutes les intégrales écrites ici convergent, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = [f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

   C'est-à-dire $\boxed{\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).}$

7. La fonction f' vérifie donc les hypothèses de la question précédente, ainsi, pour $p > 0$,

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)) - f'(0) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

   On a donc bien $\boxed{L(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)}$

Partie IV — Injectivité de la transformation de Laplace

8. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g en est une primitive.

   Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable, et pour tout } t \geqslant 0 : g'(t) = f'(t)\mathrm{e}^{-t}}$.

9. On a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}(f)(1) = 0$. Ainsi, $|g(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Il existe alors $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|g(t)| \leqslant 1$.

   Or, la fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0, A]$, on peut donc appliquer le théorème des bornes atteintes : la fonction $|g|$ est bornée sur $[0, A]$, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0, A]$, $|g(t)| \leqslant M$.

   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)| \leqslant \max(M, 1)$.

   $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc bien bornée sur } \mathbb{R}_+.}$

10. La fonction g est continue, car dérivable, et bornée.

    D'après la question 6., g appartient à E, donc $\boxed{\mathcal{L}(g)(p) \text{ existe pour tout } p > 0}$.

    Montrons que g vérifie les hypothèses de la question 8..

    La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

    Si $p > 1$, $g'(t)\mathrm{e}^{-pt} = f(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}$. Comme $f \in E$ et comme $p+1 > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t$ converge, donc $g' \in E$.

    Enfin, comme g est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)| \leqslant M$.

    D'où, pour $p > 0$, $|g(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |g(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leqslant M\mathrm{e}^{-pt}$.

    Comme $\mathrm{e}^{-pt} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a, par majoration $|g(t)\mathrm{e}^{-pt}| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g(t)\mathrm{e}^{-pt} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    Ainsi, on a
    $$\mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(g)(p) - g(0).$$

    Comme $g(0) = 0$ et comme
    $$\mathcal{L}(g')(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(p+1)$$
    on obtient bien
    $$\boxed{\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1)}$$

11. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $u \mapsto -\ln(u)$ étant continue et à valeurs positives sur $]0, 1]$, la fonction g est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues.

    De plus, $-\ln(u) \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, or $\displaystyle\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

    Par compositions de limites, $g(-\ln(u)) \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, ainsi $\varphi(u) \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} \varphi(0)$.

    Ainsi, φ est aussi continue en 0, donc $\boxed{\varphi \text{ est bien continue sur } [0, 1]}$.

12. La fonction $\psi : u \mapsto -\ln(u)$ réalise une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1]$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer la formule de changement de variable.

    L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_1^0 g(-\ln(u))\mathrm{e}^{-p(-\ln(u))}\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$ converge et
    $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t &= \int_1^0 g(-\ln(u))\mathrm{e}^{-p(-\ln(u))}\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\int_1^0 g(-\ln(u))\mathrm{e}^{p\ln(u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \varphi(u)u^p\frac{1}{u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\mathrm{d}u.$$

On a donc bien
$$\boxed{\forall p>0, \qquad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\mathrm{d}u}$$

13. Comme $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle, la question 12. nous assure que, pour tout $p>0$, $\mathcal{L}(g)(p) = 0$, d'où par la question précédente

$$\boxed{\int_0^1 \varphi(u)u^n\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t = \mathcal{L}(g)(p) = 0}$$

Soit P une fonction polynomiale. Il existe donc des coefficients $a_0,\dots,a_n$ tels que $P : t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.

Par linéarité de l'intégrale, on a donc

$$\boxed{\int_0^1 P(u)\varphi(u)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 u^k\varphi(u)\mathrm{d}u = 0}$$

14. Considérons une suite de polynômes (P_n) complexes telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons $M_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|$ et $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$ (qui existe par continuité de φ sur le segment $[0,1]$ et le théorème des bornes atteintes).

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 (P_n(t)-\varphi(t))\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |P_n(t)-\varphi(t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 M_n M \\
&\leqslant M_n M
\end{aligned}$$

On a donc par majoration

$$\left|\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

D'où
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t = 0}$$

15. D'après la question 15. on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

D'où, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t = 0$

⚠Attention

φ étant complexe (car g l'est aussi, car f l'est aussi), on ne peut ici conclure directement

Traitons d'abord le résultat dans le cas où f (donc ϕ) est réelle. La fonction ϕ^2 est donc continue sur $[0,1]$, positive, d'intégrale nulle, donc ϕ^2 est nulle sur $[0,1]$, donc ϕ est nulle sur $[0,1]$, ce qui signifie que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a alors pour $t\geqslant 0$: $f(t) = g'(t)\mathrm{e}^t = 0$.

Démontrons le cas général. Décomposons f en ses parties réelles (f_r) et imaginaires (f_i) :

$$f = f_r + f_i.$$

Comme $f_r^2 \leqslant |f|^2$, on obtient $|f_r| \leqslant |f|$, et l'on montre par majoration que $f_r \in E$. De même, $f_i \in E$.

Par linéarité de l'intégrale, on a donc pour tout $p > 0$:

$$0 = \mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(f_r)(p) + i\mathcal{L}(f_i)(p).$$

Comme $L(f_r)(p)$ et $L(f_i)(p)$ sont réelles, on obtient donc $L(f_r)(p) = L(f_i)(p) = 0$.

On applique le résultat réel à f_r et à f_i, donc $f_r = f_i = 0$, donc $f = 0$.

Finalement, $\boxed{\text{dans tous les cas } f = 0}$

16. On a montré que $\mathcal{L}$ est linéaire. La dernière question montre que $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{0\}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est injective.}}$

Partie V — Applications aux équations différentielles

17. *Résolution classique*

(a) On considère une fonction y de la forme $y : t \mapsto at + b$. On a alors pour tout t : $y'(t) = a$ et $y''(t) = 0$.

Ainsi,

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2at + 2b + 2a.$$

On voit immédiatement que $\boxed{y : t \mapsto \frac{t}{2} \text{ est solution de } (\mathcal{P}).}$

(b) L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$ qui admet donc $-1 \pm i$ pour solutions.

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (\lambda \cos(t) + \mu \sin(t))\mathrm{e}^{-t} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (\lambda \cos(t) + \mu \sin(t))\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}. \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Soit y une telle fonction. On a $y(0) = \lambda$, donc $y(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$.

Supposons donc que $\lambda = 0$, alors $y'(t) = \mu \cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \mu \sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}$.

D'où $y'(0) = \mu + \frac{1}{2}$, et ainsi $y'(0) = 1$ si et seulement si $\mu = \frac{1}{2}$.

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de ce problème de Cauchy est } t \mapsto \frac{1}{2}\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}}$

18. *Résolution utilisant la transformation de Laplace*

(a) On a $\mathcal{L}(y')(p) = p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = p\mathcal{L}(y)$ et $\mathcal{L}(y'')(p) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - py(0) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - 1$.

D'où, par linéarité de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + 2y) = \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = (p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1.$$

De plus, en notant $d : t + 1$, on a

$$\mathcal{L}(d)(p) = F_0(p) + F_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

On obtient donc $(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$

Ainsi

$$\boxed{(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1 + p + p^2}{p^2}}$$

(b) En multipliant cette relation par p^2, on obtient que pour tout $p > 0$, $\dfrac{1+p+p^2}{p^2+2p+2} = a + \dfrac{bp^2}{(p+1)^2+1}$

En faisant tendre p vers 0, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $1 = a + b$, d'où $b = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi

$$\boxed{\forall p > 0, \qquad \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}}$$

(c) On a ainsi

$$\boxed{\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2}}$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}G_{1,1} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(f_1 + h_{1,1})\right)$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc $y = \dfrac{1}{2}(f_1 + h_{1,1})$.

C'est-à-dire $\boxed{y : t \mapsto \dfrac{1}{2}(t + \sin(t)\mathrm{e}^{-t}).}$

(d) La fonction $y : t \mapsto \dfrac{1}{2}(t + \sin(t)\mathrm{e}^{-t})$. est de classe $\mathcal{C}^2$, en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

On a bien $y(0) = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors $y'(t) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t})$ d'où $y'(0) = 1$.

De plus $y''(t) = \dfrac{1}{2}(-\sin(t) - \cos(t) - \cos(t) + \sin(t))\mathrm{e}^{-t} = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t}$

Ainsi

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} + 1 + \cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t} + t + \sin(t)\mathrm{e}^{-t} = t + 1.$$

$\boxed{y \text{ est donc bien solution du problème de Cauchy } \mathcal{P}.}$

Corrigé du problème 2

Préliminaires

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. H étant un hyperplan, on a $\dim(H) = d - 1$.

   $a \in E \setminus H$ donc en particulier $a \neq 0_E$ (car $0_E \in H$). Ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$.

   Soit $x \in H \cap \mathrm{Vect}(a)$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$.

   Si $\lambda \neq 0$ alors $a = \dfrac{1}{\lambda}x \in H$ ce qui n'est pas le cas, ainsi $\lambda = 0$. On en déduit que $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$.

   Ainsi $\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}(a))$ et $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$

   On a donc montré que $\boxed{E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)}$

2. $\varphi(a) \in E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, ainsi il existe un unique couple $(x_a, h_a) \in \mathrm{Vect}(a) \times H$ tel que $\varphi(a) = x_a + h_a$.

   Or $x_a \in \mathrm{Vect}(a)$ donc il existe un unique réel réel γ tel que $x_a = \gamma a$.

   Ainsi $\boxed{\text{il existe un unique réel } \gamma \text{ et un unique } h_a \in H \text{ tels que } \varphi(a) = \gamma a + h_a}$

3. Soit $b \in E \setminus H$.

   D'après les questions précédentes $E = H \oplus \mathrm{Vect}(b)$ et il existe un unique réel β et un unique vecteur $h_b \in H$ tel que $\varphi(b) = \beta b + h_b$. Montrons que $\beta = \gamma$.

   Comme $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$ il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in H$ tel que $b = \lambda a + h$. Comme $b \notin H$ on a $\lambda \neq 0$.

   Il s'ensuit que

   $$\varphi(b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(h) = \lambda\gamma a + \lambda h_a + h = \gamma b + \underbrace{\lambda h_a + (1 - \gamma h)}_{\in H}$$

   Or $\varphi(b) = \beta b + h_b$, d'où par unicité de la décomposition dans $E = H \oplus \mathrm{Vect}(b)$ on en déduit que $\begin{cases} \gamma b = \beta b \\ h_a + (1 - \gamma h) = h_b \end{cases}$.

   En particulier, puisque $b \neq 0_E$, on a $\gamma = \beta$

   Finalement on a bien montré que $\boxed{\text{le réel } \gamma \text{ ne dépend pas du choix de } a \notin H.}$

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

4. On a

   $$\begin{aligned} \varphi\left(a + \frac{1}{\gamma - 1}h_a\right) &= \varphi(a) + \frac{1}{\gamma - 1}\varphi(h_a) \\ &= \gamma a + h_a + \frac{1}{\gamma - 1}h_a \\ &= \gamma a + \frac{\gamma}{\gamma - 1}h_a \\ &= \gamma\left(a + \frac{1}{\gamma - 1}h_a\right) \end{aligned}$$

   En notant $u = a + \dfrac{1}{\gamma - 1}h_a$ on a alors $\varphi(u) = \gamma u$. De plus $a \notin H$ donc $u \neq 0_E$.

   Ainsi $\boxed{\text{il existe un vecteur } u \text{ non-nul tel que } \varphi(u) = \gamma u}$

5. (a) Soit $x \in E_\gamma$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$.

   Alors $\varphi(x) = \lambda\varphi(u) = \lambda\gamma u = \gamma x$.

   Ainsi $E_\gamma \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma\mathrm{Id})$.

   Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma\mathrm{Id})$

   Il existe alors $\mu \in \mathbb{R}$ et $h \in H$ tel que $x = \mu a + h$.

   Ainsi $\varphi(x) = \gamma x = \gamma\mu a + \gamma h$ et $\varphi(x) = \mu\varphi(a) + \varphi(h) = \gamma\mu a + \mu h_a + h$.

   Par unicité de la décomposition de $\varphi(x)$ dans la somme directe $E = H \oplus \mathrm{Vect}(b)$ on a alors $\gamma\mu h = \mu h_a + h$.

   On en déduit que $h = \dfrac{\mu}{\gamma - 1}h_a$

   D'où $x = \mu a + \dfrac{\mu}{\gamma - 1}h_a = \mu u \in E_\gamma$

   Finalement, on a montré par double inclusion que $\boxed{E_\gamma = \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma\mathrm{Id})}$

   (b) On a $\dim(H) = d - 1$ et, d'après la question précédente $\dim(E_\gamma) = 1$.

   Soit $x \in H \cap E_\gamma$.

   Alors $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = \gamma x$. Or $\gamma \neq 1$, ainsi $x = 0_E$.

   On a donc $H \cap E_\gamma = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(H) + \dim(E_\gamma)$, ainsi

   $\boxed{E = H \oplus E_\gamma}$

   (c) En notant $\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \cdots, e_{d-1}}_{\in H}, \underbrace{e_d}_{\in E_\gamma})$ on a

   $$\forall k \in [\![1, d-1]\!], \quad \varphi(e_k) = e_k \qquad \text{et} \qquad \varphi(e_d) = \gamma e_d$$

Dimension

On aurait aussi pu utiliser des arguments liés à la réduction des endomorphismes (chapitre qui n'avait pas été abordé au moment du DS) : H est inclus dans l'espace propre pour la valeur propre 1, $\mathrm{Vect}(u)$ est inclus dans l'espace propre pour la valeur propre γ. Or $\dim(E) \geqslant \dim(E_1(\varphi)) + \dim(E_\gamma(\varphi)) \geqslant d - 1 + d$. Ainsi $\dim(E_1(\varphi)) = d - 1$ et $\dim(E_\gamma(\varphi)) = 1$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

6. Soit D une droite vectorielle telle que $\varphi(D) \subset D$ et $y \in E$ tel que $D = \mathrm{Vect}(y)$.

   — Si $y \in H$ alors $D \subset H$.

   — Si $y \notin D$ alors d'après le préliminaire on a $E = D \oplus H$ et $\varphi(y) = \gamma y + h_y$ avec $h_y \in H$.

   Or $\varphi(y) \in D = \mathrm{Vect}(y)$, ainsi $h_y = \varphi(y) - \gamma y \in D$.

   Ainsi $h_y \in D \cap H$, d'où $h_y = 0_E$.

   On a ainsi $\varphi(y) = \gamma y$, donc $y \in \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma \mathrm{Id}_E) = E\gamma$.

   Par conséquent $D \subset E_\gamma$. Or $\dim(D) = \dim(E_\gamma) = 1$ et donc $D = E_\gamma$.

   Finalement les seules droites vectorielles D telle que $\varphi(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.

7. Soit V un sous-espace vectoriel de E.

   — Supposons que $V \subset H$.

   Soit $x \in V$, alors $x \in H$, d'où $\varphi(x) = x \in V$.

   Ainsi $\varphi(V) \subset V$.

   — Supposons désormais que $E_\gamma \subset V$

   Soit $x \in V$. Comme $E = H \oplus E_\gamma$ on peut écrire $x = h_x + \lambda_x u$ avec $h_x \in \mathbb{R}$ et $\lambda_x \in \mathbb{R}$.

   Alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(h_x) + \lambda_x \varphi(u) \\ &= h_x + \lambda_x \gamma u \\ &= x - \lambda_x u + \lambda_x \gamma u \\ &= \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{\lambda_x(\gamma - 1)u}_{\in E_\gamma \subset V} \end{aligned}$$

   Ainsi $\varphi(V) \subset V$.

   En conclusion $\boxed{\text{si } E_\gamma \subset V \text{ ou } V \subset H \text{ alors } \varphi(V) \subset V.}$

8. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$.

   (a) $E_\gamma \subset F$ donc, d'après la question 7., $\boxed{\varphi(F) \subset F}$

   (b) Supposons par l'absurde que $\varphi(V) \subset V$.

   Soit $x \in D$, comme $x \in F$ on a alors $\varphi(x) \in F$. Or $x \in V$ donc $\varphi(x) \in V$.

   On en déduit que $\varphi(x) \in F \cap V$.

   Montrons maintenant que $F \cap V = D$.

   Soit $y \in F \cap V$, on peut alors écrire $y = \underbrace{y_D}_{\in D} + \underbrace{\lambda_y u}_{\in E_\gamma}$.

   Alors $\lambda u = \underbrace{y}_{\in V} - \underbrace{y_D}_{\in D \subset V}$

   Si $\lambda \neq 0$, alors $u \in V$ et donc $E_\gamma = \mathrm{Vect}(u) \subset V$ ce qui est absurde.

   Ainsi $\lambda = 0$ et donc $y = y_D \in D$.

   On a donc montré que, pour tout $y \in D$, $\varphi(y) \in D$. D est donc une droite vectorielle stable par φ.

   La question 6. nous assure alors que $D = E_\gamma$ ou $D \subset H$. Par définition D ne vérifie aucune de ces conditions.

   Finalement on a montré par l'absurde que $\boxed{\varphi(V) \not\subset V.}$

9. On a montré à la question 7. que, si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $\varphi(V) \subset V$.
   On a de plus montré à la question 8. que, si $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ alors $\varphi(V) \not\subset V$.
   Finalement
   $\boxed{\varphi(V) \subset V \text{ si et seulement si } E_\gamma \subset V \text{ ou } V \subset H \text{ alors } \varphi(V) \subset V.}$

Partie II

10. (a) Pour $h \in H$ on a $(\varphi - \mathrm{Id})(h) = 0$ ainsi $H \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$
    De plus, comme $\varphi \neq \mathrm{Id}$ on a $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \neq E$.
    D'où $d - 1 \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})) < d$.
    Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})) = d-1$. Le théorème du rang nous assure alors que $\boxed{\mathrm{Rang}(\varphi - \mathrm{Id}) = 1.}$
    (b) Soit c une base de $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$.
    Pour $x \in E$ on a $\varphi(x) - x = (\varphi - \mathrm{Id})(x) \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$.
    Or $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(c)$, il existe donc un réel $f(x)$ tel que $\varphi(x) - x = f(x)c$.
    Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in E, \text{ il existe un réel } f(x) \text{ tel que } \varphi(x) = x + f(x)c.}$

    Unicité — Remarquons que l'unicité des coordonnées dans une base (ici des coordonnées de $\varphi(x) - x$ dans la base c nous assure de l'unicité de $f(x)$.

    (c) Soit $(x, y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
    D'après la question précédente on a alors
    $$\varphi(x + \lambda y) = x + \lambda y + f(x + \lambda y)c \qquad \varphi(x) = x + f(x)c \qquad \varphi(y) = y + f(y)c$$
    Ainsi, par soustraction
    $$\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x) - \lambda\varphi(y) = (f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y))\, c$$
    Or $\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x) - \lambda\varphi(y) = 0_E$ par linéarité de φ et $c \neq 0_E$. Ainsi
    $$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$
    $\boxed{f \text{ est donc linéaire.}}$
    Soit $x \in H$, alors $\varphi(x) = x = x + 0c$, ainsi $f(x) = 0$

    Unicité — On utilise ici l'unicté évoquée à la question précédente.

    Ainsi $H \subset \mathrm{Ker}(f)$.
    Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a alors $\varphi(x) = x$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.
    Or $H \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\dim(H) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})) = d - 1$. D'où $H = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$
    Ainsi $x \in H$.
    Par double inclusion on a donc montré que $\boxed{H = \mathrm{Ker}(f)}$
11. Montrons d'abord que $c \in H$.
    Supposons par l'absurde que $f(c) \neq 0$, alors $c \notin H$.
    Ainsi d'après la question 2. on a $\varphi(c) = c + h_c$ avec $h_c \in H$. Or $\varphi(c) = c + f(c)c$.
    Ainsi $f(c)c = h_c \in H$. Comme $c \notin H$ on a alors $f(c) = 0$ ce qui est absurde.
    Ainsi on a montré par l'absurde que $f(c) = 0$.

    Soit $x \in E$, on a alors $\varphi(x) - x \in \mathrm{Vect}(c)$, et $c \in \mathrm{Ker}(f) = H = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.
    D'où $(\varphi - \mathrm{Id})(\varphi(x) - x) = 0_E$, c'est-à-dire
    $$\varphi^2(x) - 2\varphi(x) + x = 0_E$$
    On en déduit que $\varphi \circ (\mathrm{Id} - \varphi) = \mathrm{Id}$
    Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1} = \mathrm{Id} - \varphi}$

    Autre approche — Soit $\psi : x \mapsto x - \lambda f(x)c$.
    Alors, pour $x \in E$ on a, après calcul, $\psi(\varphi(x)) = x$.
    Ainsi φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$

12. On sait que $c \in H$, on va compléter c en une base de $H = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.
    Soit ainsi $(c, e_2, \cdots, e_{d-1})$ une base de H.
    On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (c, e_2, \cdots, e_{d-1}, e_d)$ de H et on note $\lambda = f(e_n)$

On a alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

13. Soit V un sous-espace vectoriel de E.

    On va s'inspirer de la démarche de la partie I

    — Si $V \subset H$ alors pour tout $x \in V$, $\varphi(x) = x \in V$
    — Si $c \in V$ alors, pour $x \in V$ on a $\varphi(x) = \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{f(x)c}_{\in V}$

    Ainsi, si $V \subset H$ ou si $c \in V$ alors $\varphi(V) \subset V$.

    Réciproquement supposons que $\varphi(V) \subset V$ et que $V \not\subset H$.

    Soit $x \in V$ tel que $x \notin H$.

    Alors $\varphi(x) = x + f(x)c$, d'où $f(x)c = \underbrace{\varphi(x)}_{\in V} - \underbrace{x}_{\in V} \in V$.

    Or $x \notin H$, d'où $f(x) \neq 0$ et donc $c = \dfrac{1}{f(x)}(\varphi(x) - x) \in V$.

    Ainsi, si $V \not\subset H$ alors $c \in V$.

    Finalement on a montré que $\boxed{\varphi(V) \subset V \text{ si et seulement } V \subset H \text{ ou } c \in V}$